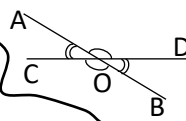


1) ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ВЛАСТИВОСТІ, ТЕОРЕМИ (ПЛАНІМЕТРІЯ)

Основні поняття: точка, пряма, площина



вертикальні кути



$\angle AOC$ і $\angle DOB$,
 $\angle AOD$ і $\angle COB$
 – вертикальні
 $\angle AOC = \angle DOB$,
 $\angle AOD = \angle COB$

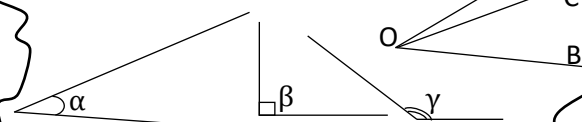
аксіоми – твердження без доведень

$A \text{---} C \text{---} B$ AB – відрізок, $AB = AC + CB$

CD – промінь, C – початок променя $C \text{---} D$

$K \text{---} O \text{---} M$ OK і OM – доповняльні промені,
 $\angle KOM$ – розгорнутий, $\angle KOM = 180^\circ$

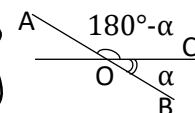
$\angle AOB$ – кут, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$



α – гострий, β – прямий, γ – тупий,
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\beta = 90^\circ$ $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

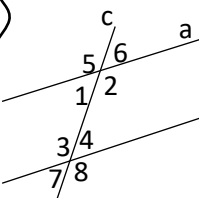
OC – бісектриса,
 $\angle AOC = \angle COB$

суміжні кути



$\angle AOC$ і $\angle COB$ – суміжні
 $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

Паралельні прямі та кути



$\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ – внутрішні
 односторонні

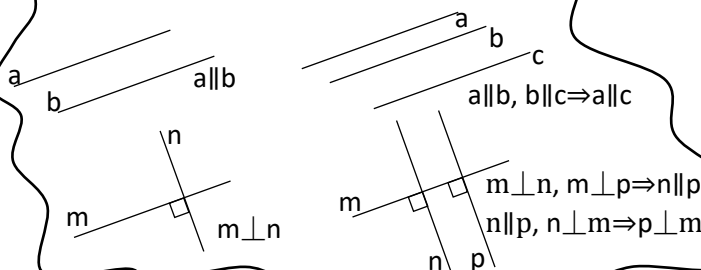
$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

$\angle 1$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 3$ – внутрішні
 різносторонні

$a \parallel b$, c – січна

$\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$

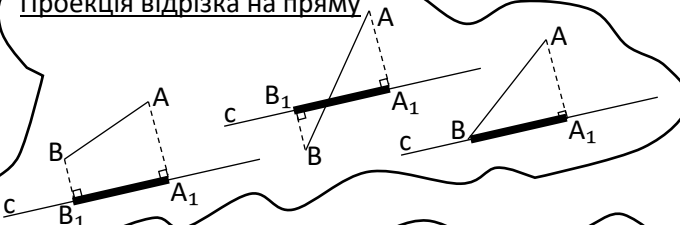
$\angle 5$ і $\angle 3$ – відповідні, $\angle 5 = \angle 3$



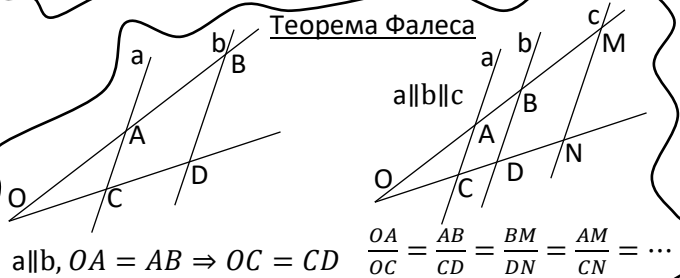
види трикутників



Проекція відрізка на пряму

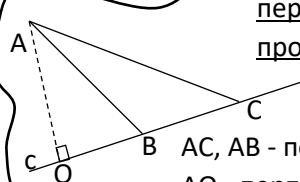


Теорема Фалеса



$a \parallel b$, $OA = AB \Rightarrow OC = CD$ $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{BM}{DN} = \frac{AM}{CN} = \dots$

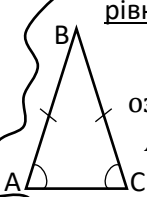
Похила, перпендикуляр, проекція



AC , AB – похилі
 AO – перпендикуляр
 OC , OB – проекції похилих
 $AC > AB \Leftrightarrow OC > OB$

2) ТРИКУТНИКИ

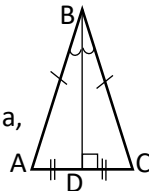
рівнобедрений



означення:
 $AB = BC$

властивості:

$\angle A = \angle C$
BD – висота, медіана,
бісектриса



ознаки

$\triangle ABC$ – рівнобедрений, якщо

- $\angle A = \angle C$
- AD – висота і медіана
- AD – висота і бісектриса
- AD – бісектриса і медіана

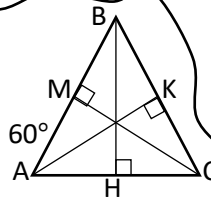
АЛЕ

AK – бісектриса
AM – медіана
AH – висота



рівносторонній

$AB = BC = AC$
 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

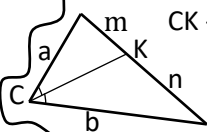
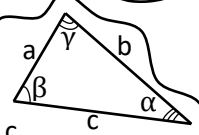


$$P = a + b + c$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

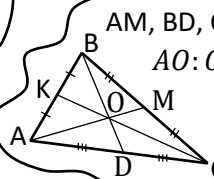
$$|a - b| < c < a + b$$

$$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

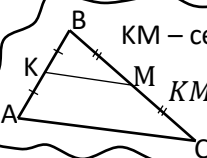
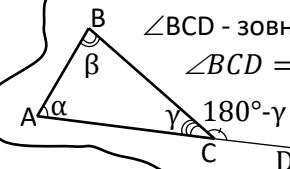


CK – бісектриса
 $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

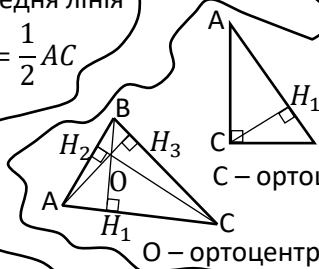
AM, BD, CK – медіани
 $AO : OM = 2 : 1$



$\angle BCD$ – зовнішній
 $\angle BCD = \alpha + \beta$

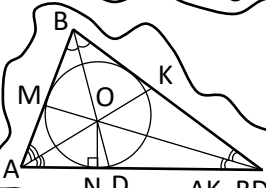
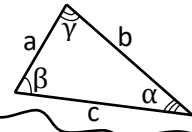


KM – середня лінія
 $KM = \frac{1}{2} AC$



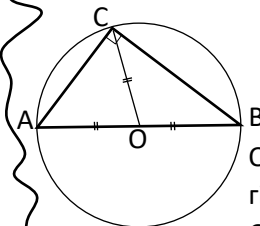
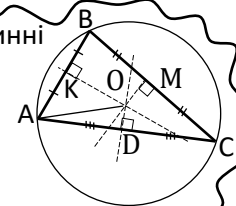
C – ортоцентр
O – ортоцентр

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



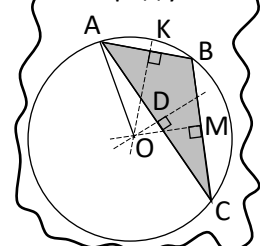
AK, BD, CM – бісектриси
 $ON \perp AC$, ON – радіус

OK, OD, OM – серединні
перпендикуляри
OA – радіус

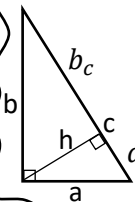


O – середина
гіпотенузи
 $OA = OB = OC = R$

OK, OD, OM – серединні
перпендикуляри
OA – радіус



прямокутний



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

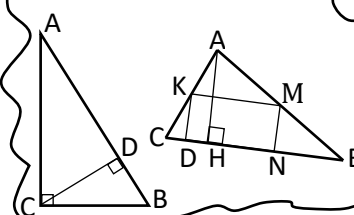
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$



DKMN – прямокутник

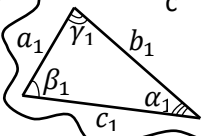
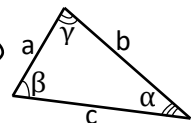
$$\triangle KAM \sim \triangle CAB$$

$$AH \perp BC \Rightarrow$$

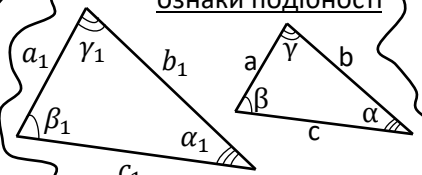
$$\triangle CKD \sim \triangle CAH, \dots$$

ознаки рівності

- $a = a_1, c = c_1, \beta = \beta_1$
- $c = c_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$
- $a = a_1, c = c_1, b = b_1$

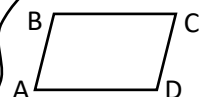


ознаки подібності



- $a = ka_1, c = kc_1, \beta = \beta_1$
- $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$
- $a = ka_1, c = kc_1, b = kb_1$

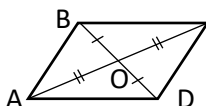
3) ПАРАЛЕЛОГРАМ



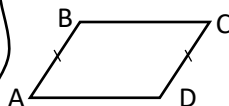
означення

$$AB \parallel CD, AD \parallel BC$$

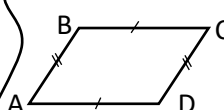
ознаки



$AC \cap BD = O,$
 $AO = OC, BO = OD \Rightarrow$
 $ABCD$ – паралелограм

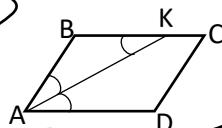


$AB \parallel CD, AB = CD \Rightarrow$
 $ABCD$ – паралелограм

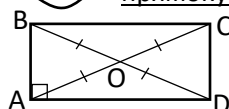


$AB = CD, BC = AD \Rightarrow$
 $ABCD$ – паралелограм

бісектриса $\Rightarrow$ рівнобедрений трикутник
 $\triangle ABK$ – рівнобедрений



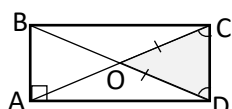
прямокутник



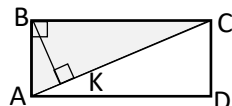
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

$$AC = BD$$

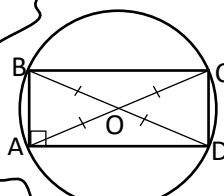
трикутники у прямокутнику



$\triangle COD$ – рівнобедрений

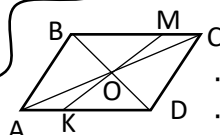


$\triangle ABC$ – прямокутний



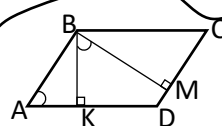
описане коло
прямокутника

$$R = \frac{1}{2}d$$



властивості

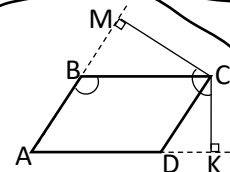
- $\cdot AB = CD, AD = BC$
- $\cdot \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
- $\cdot \angle A + \angle D = 180^\circ$
- $\cdot AC \cap BD = O,$
 $AO = OC, BO = OD$
- $\cdot O \in KM \Rightarrow KO = OM$
- $\cdot AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$



BK і BM – висоти,

$$BK \neq BM,$$

$$\angle KBM = \angle A$$



CK і CM – висоти,

$$CK \neq CM,$$

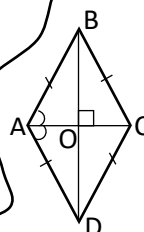
$$\angle KCM = \angle B$$

ромб

$$AB = BC = CD = DA,$$

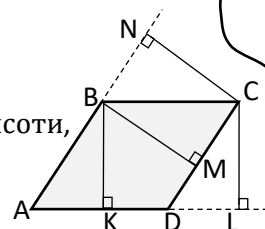
$$AC \perp BD,$$

$$\angle BAO = \angle DAO$$

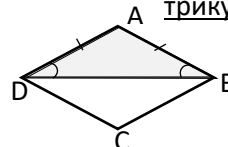


BK і BM, CN і CL – висоти,

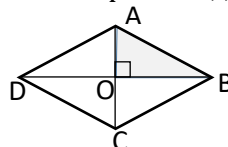
$$BK = BM = CN = CL$$



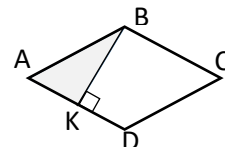
трикутники у ромбі



$\triangle BCD$ – рівнобедрений

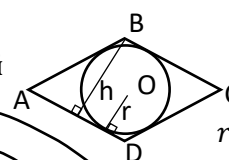


$\triangle AOB$ – прямокутний



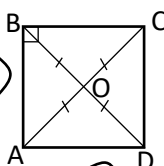
$\triangle ABK$ – прямокутний

вписане коло у ромб



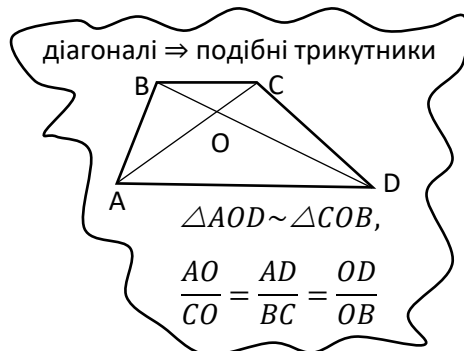
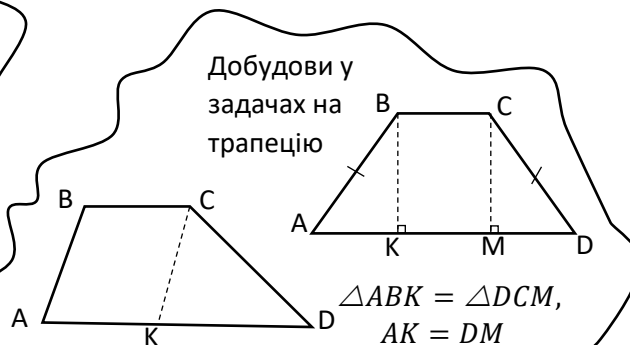
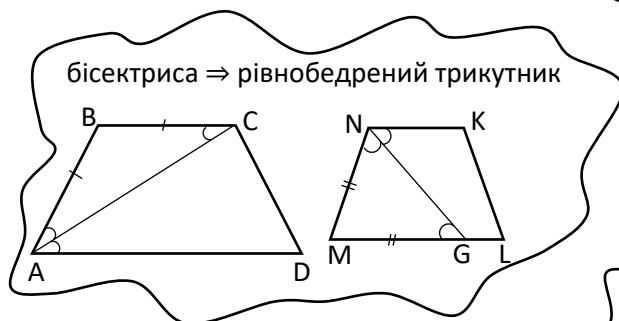
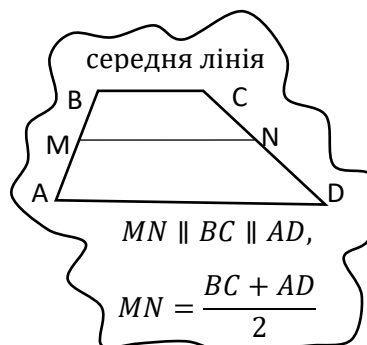
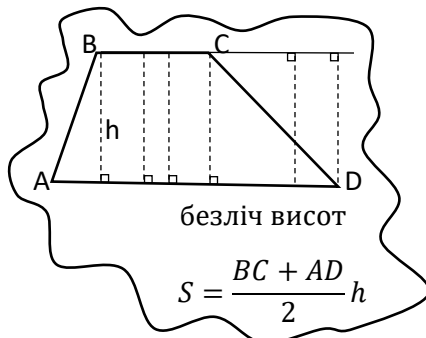
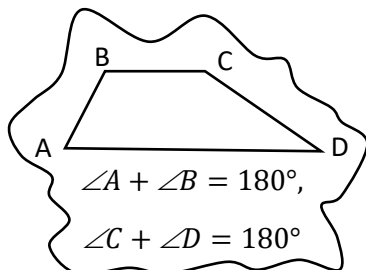
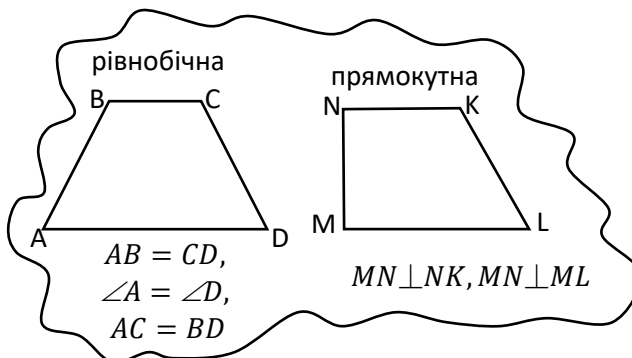
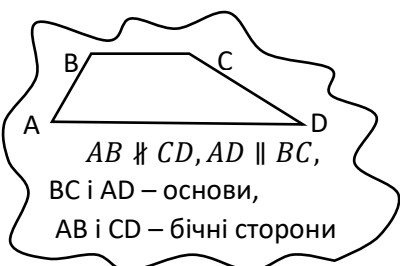
$$r = \frac{1}{2}h$$

квадрат

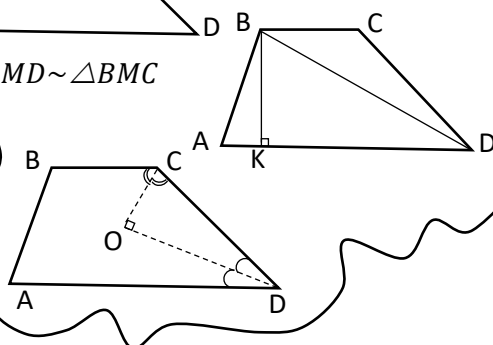
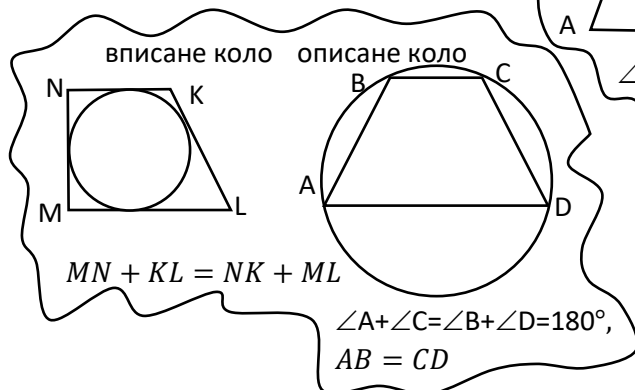
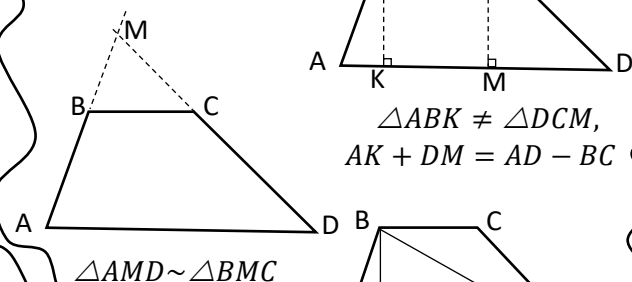


- прямокутник з рівними сусідніми сторонами
- ромб з прямим кутом

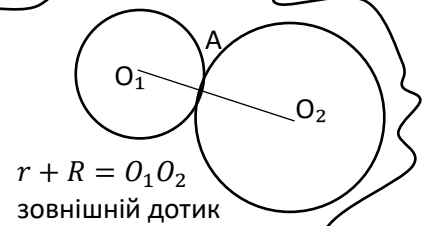
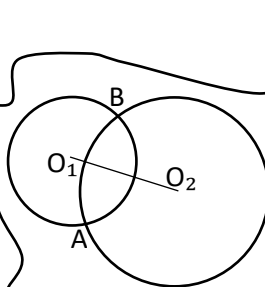
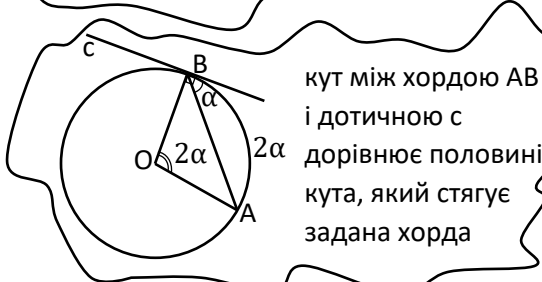
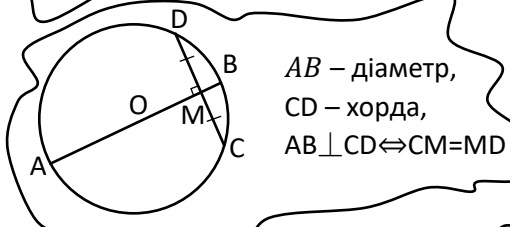
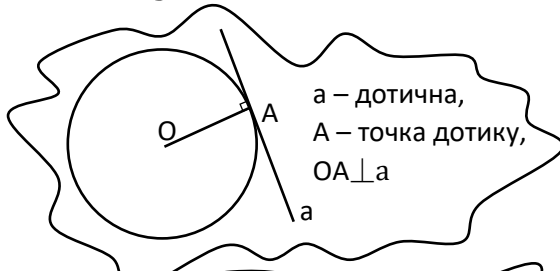
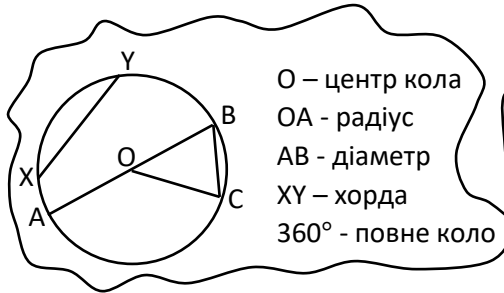
4) ТРАПЕЦІЯ



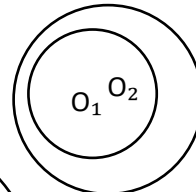
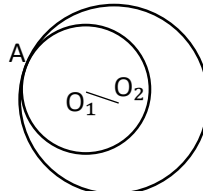
$CK \parallel AB,$
ABCK - паралелограм



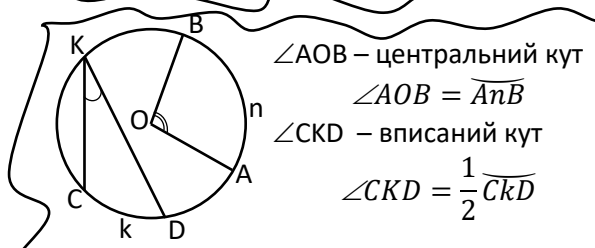
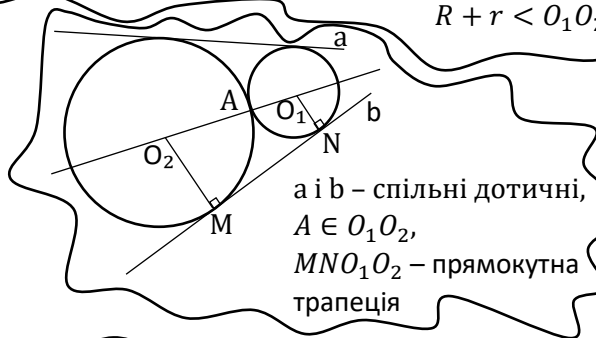
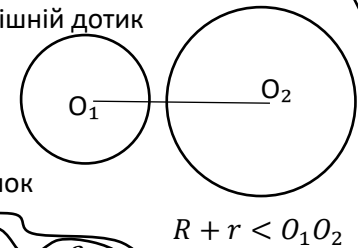
5) КОЛО І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



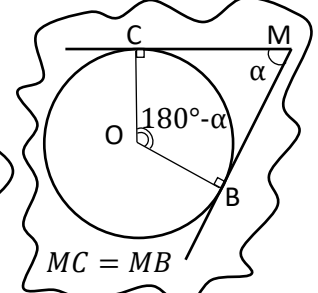
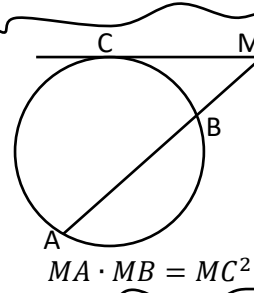
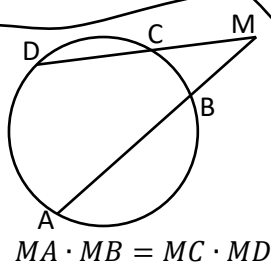
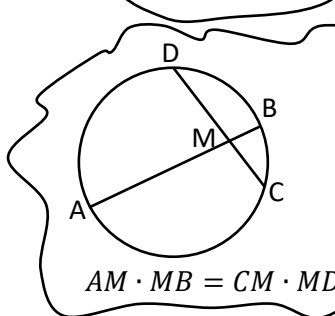
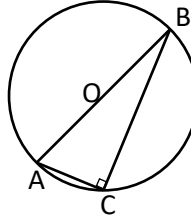
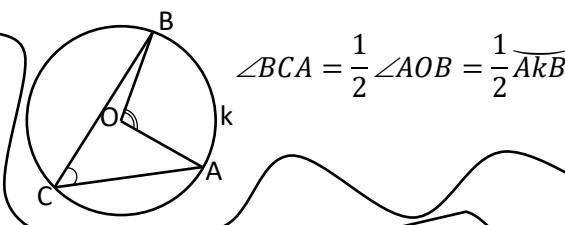
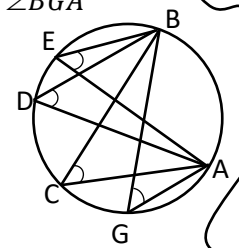
$R - r < O_1O_2 < R + r$
Дві точки перетину



$R - r = O_1O_2$
внутрішній дотик



$\angle BEA = \angle BDA = \angle BCA = \angle BGA$



6) ПЛОЩІ

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$S = \frac{1}{2}absin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = pr, r - \text{радіус вписаного кола}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, R - \text{радіус описаного кола}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$$

$$S = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}ch$$

$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = ah$$

$$S = absin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$$

$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$$

$$S = a^2$$

$$S = \frac{1}{2}d^2$$

$$S = ah$$

$$S = a^2\sin\alpha$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2$$

$$S = \frac{a+b}{2}h$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$$

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta$$

$$S = \pi R^2$$

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$$

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \beta$$

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha - S_{\triangle AOB}$$

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \beta + S_{\triangle AOB}$$

7) КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ (планіметрія)

$A(x, y)$, x – абсциса, y – ордината

$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \Rightarrow$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

C – середина $AB \Rightarrow C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

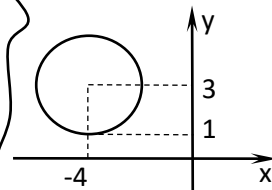
рівняння кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

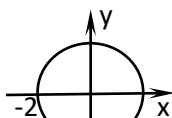
центр $(a; b)$, радіус R

$$x^2 + y^2 = R^2$$

центр $(0; 0)$, радіус R



$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$$



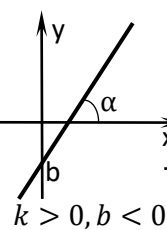
$$x^2 + y^2 = 4$$

рівняння прямої

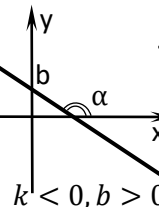
$ax + by + c = 0$ – загальне

$y = kx + b$ – через кутовий коефіцієнт,

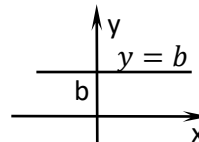
$k = \tan \alpha$, α – кут нахилу прямої



$k > 0, b < 0$



$k < 0, b > 0$



$y = b$

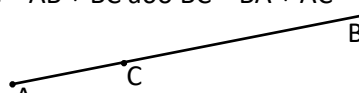
$x = n$

$x = n$

$x = n$

A, B і C лежать на одній прямій $\Leftrightarrow AB = AC + CB$

(або $AC = AB + BC$ або $BC = BA + AC$)



A, B і C лежать на одній прямій $\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

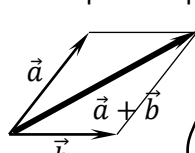
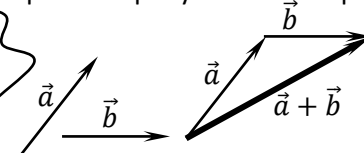
$\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$$

ГЕОМЕТРИЧНО СУМА

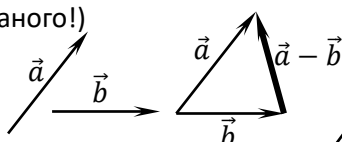
Правило трикутника

Правило паралелограма



ГЕОМЕТРИЧНО РІЗНИЦЯ

(до зменшуваного!)



$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

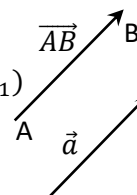
$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

$$a_1 = x_2 - x_1;$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

$\vec{a}(a_1; a_2)$,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} - \text{модуль}$$



$\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

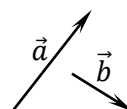
скалярний

добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

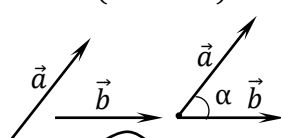


α – кут між векторами

$\cos \alpha < 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$) $\Leftrightarrow \alpha$ – тупий

$\cos \alpha = 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) $\Leftrightarrow \alpha$ – прямий

$\cos \alpha > 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$) $\Leftrightarrow \alpha$ – гострий



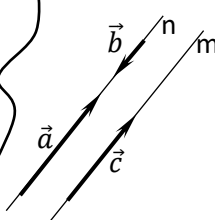
$\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$,

$\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$ – колінеарні вектори

$\vec{a} \uparrow \vec{b}$ – колінеарні співнаправлені

$\vec{a} \downarrow \vec{c}$ – колінеарні протилежно напрямлені

$m \parallel n$



$\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ – колінеарні

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k, \vec{a} = k \vec{b}$$

$k > 0$ – напрям зберігається

$k < 0$ – напрям протилежний

$|k| > 1$ – модуль збільшується

$|k| < 1$ – модуль зменшується

$$|\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{b}|$$

